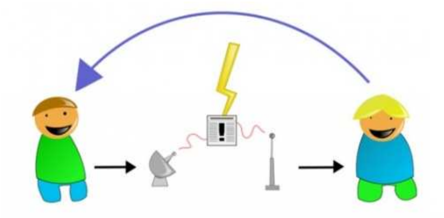
Canal binaire symétrique sans mémoire

Niveau : terminale S.

Lien avec le programme : probabilité, conditionnement, indépendance, arbre pondéré, activité algorithmique pour simuler une marche aléatoire, (loi binomiale). Exemple de suite arithmético-géométrique, suite géométrique, limite d'une telle.

Lien avec Les maths au quotidien : Codage.



I- ERREUR DE TRANSMISSION

Le monde moderne est rempli de communications d'informations, que ce soit des sons, des lettres, des chiffres… En informatique et dans les télécommunications, tout message est codé habituellement à l'aide de 0 et de 1 transmis sous forme de courants électriques, d'ondes radios, de signaux lumineux… Le support de la transmission s'appelle un canal en théorie de l'information, théorie fondée par Claude Shannon en 1948. C'est par exemple une ligne téléphonique, une liaison radio, un protocole internet (comme TCP), une fibre optique, un disque compact…

Malheureusement, tout système de transport d'informations est imparfait, et il existe un risque de parasitage, qu'on appelle le « bruit », qui perturbe le canal. Cela peut être une variation incontrôlée ou la faiblesse du signal électrique, ou bien des rayures dans le cas du CD.

Un canal binaire est un canal qui ne transporte que des bits d'informations, c'est-à-dire des 0 et des 1 ; Il est dit symétrique si la probabilité d'erreur de transmission pour chaque bit est la même pour un 0 et un 1 (un 1 est changé en 0 ou un 0 est changé en 1). Il est dit sans mémoire si deux transmissions de bits sont indépendantes entre elles.

On note p la probabilité d'erreur de transmission d'un bit.

Soit n un entier naturel. On suppose qu'un bit est transmis successivement au travers de n canaux binaires symétriques sans mémoire identiques.

Soit E_n l'évènement : « le bit reçu après ces n transmissions est le même que celui envoyé initialement ($n = 0$) ».
On s'intéresse à la probabilité p_n de l'évènement E_n.

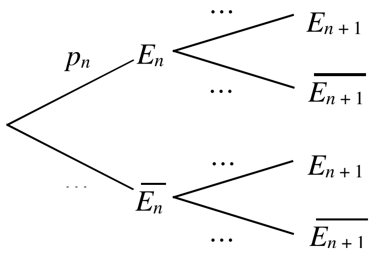
A- SIMULATION DE LA MARCHE ALEATOIRE

1. Proposer une fonction qui échange 0 et 1.
2. Compléter l'algorithme en langage Python ci-contre afin de simuler la transmission d'un bit initial successivement par 1 000 canaux binaires symétriques sans mémoire identiques.
3. Ecrire cet algorithme dans un fichier Python et le modifier afin de simuler 2 000 transmissions d'un bit initial successivement par 1 000 canaux binaires symétriques sans mémoire identiques, et de calculer la fréquence de l'évènement $E_{1\,000}$. On fera afficher cette fréquence.

```
from random import random
p = float(input("entrer probabilité d'erreur : "))
x = int(input("entrer bit initial : "))
for i ……………
    if random() …….……… :
        x = …………
```

4. Estimer la probabilité que le bit reçu au bout de n transmissions soit le même que le bit initial, quand le nombre de transmissions n devient très grand.

B- ÉTUDE MATHEMATIQUE



1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = (1 - 2p)\, p_n + p$.

3. Soit (q_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $q_n = p_n - \frac{1}{2}$.

a. Monter que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison $(1 - 2p)$. Préciser son premier terme.

b. En déduire l'expression de q_n en fonction de n, puis celle de p_n en fonction de n.

4. Retrouver l'estimation de la question 4. de la partie A.

II- UN CODE CORRECTEUR

Une solution simple pour se prémunir du bruit est d'envoyer plusieurs copies de chaque bit à être transmis : c'est le code de répétition.

Ici on transmet les bits un par un et on triple chaque bit. Donc 1 est codé en 111 et 0 en 000.

Si le destinataire reçoit deux 0 et un 1 ou deux 1 et un 0, alors il sait qu'au moins un bit est mal transmis. Le fait de répéter le bit trois fois permet d'apporter une correction si une erreur est détectée. Si par exemple le destinataire reçoit l'un des messages 011 ou 101 ou 110, le plus vraisemblable est 111, et donc le destinataire le corrige. Au contraire s'il reçoit 3 fois le même bit, le message lui semble correct et il l'accepte comme tel.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de bits erronés à la réception du message de 3 bits.

1. **a.** Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sur la transmission.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur la transmission.

2. **a.** Calculer la probabilité que le message envoyé soit erroné et non détecté comme tel.

b. Sachant que le message est erroné, calculer la probabilité que les erreurs soient non détectées.

3. Sachant que le message est correct, calculer la probabilité que le destinataire détecte une erreur.

4. Sachant que le message est détecté erroné, calculer la probabilité que la correction soit erronée.

5. Calculer la probabilité qu'après décision du destinataire, le message soit encore erroné.

Point info : rendre l'information redondante est le principe général du codage de canal, et les techniques employées peuvent être beaucoup plus élaborées (et efficaces) que l'exemple précédent. En théorie de l'information, les stratégies employées pour reconnaitre et corriger les erreurs de transmission sont le domaine des codes correcteurs d'erreurs.