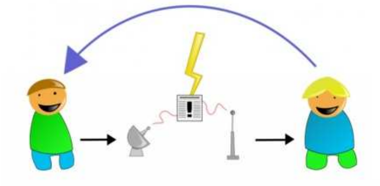
Canal binaire symétrique sans mémoire

Niveau : terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme : marche aléatoire, étude asymptotique d'une telle, matrices carrées, matrice inverse d'une matrice carrée, exemple de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2, suite de matrices lignes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = U_n A$, étude de la convergence, congruence, algorithme. (Probabilité, conditionnement, loi binomiale).

Lien avec Les maths au quotidien : Codage.



I- Erreur de transmission

Le monde moderne est rempli de communications d'informations, que ce soit des sons, des lettres, des chiffres…
En informatique et dans les télécommunications, tout message est codé habituellement à l'aide de 0 et de 1 transmis sous forme de courants électriques, d'ondes radios, de signaux lumineux… Le support de la transmission s'appelle un canal en théorie de l'information, théorie fondée par Claude Shannon en 1948. C'est par exemple une ligne téléphonique, une liaison radio, un protocole internet (comme TCP), une fibre optique, un disque compact…

Malheureusement, tout système de transport d'informations est imparfait, et il existe un risque de parasitage, qu'on appelle le « bruit », qui perturbe le canal. Cela peut être une variation incontrôlée ou la faiblesse du signal électrique, ou bien des rayures dans le cas du CD.

Un canal binaire est un canal qui ne transporte que des bits d'informations, c'est-à-dire des 0 et des 1 ; Il est dit symétrique si la probabilité d'erreur de transmission pour chaque bit est la même pour un 0 et un 1 (un 1 est changé en 0 ou un 0 est changé en 1). Il est dit sans mémoire si deux transmissions de bits sont indépendantes entre elles.

On note p la probabilité d'erreur de transmission d'un bit.

Soit n un entier naturel. On suppose qu'un bit est transmis successivement au travers de n canaux binaires symétriques sans mémoire identiques.

Soit E_n l'évènement : « le bit reçu après ces n transmissions est le même que celui envoyé initialement ($n = 0$) ».
On s'intéresse à la probabilité p_n de l'évènement E_n.

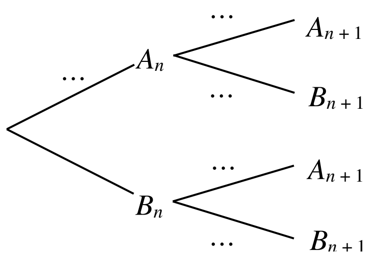
A- Simulation de la marche aleatoire

1. Proposer une fonction qui échange 0 et 1.
2. Compléter l'algorithme en langage Python ci-contre afin de simuler la transmission d'un bit initial successivement par 1 000 canaux binaires symétriques sans mémoire identiques.
3. Ecrire cet algorithme dans un fichier Python et le modifier afin de simuler 2 000 transmissions d'un bit initial successivement par 1 000 canaux binaires symétriques sans mémoire identiques, et de calculer la fréquence de l'évènement $E_{1\,000}$. On fera afficher cette fréquence.

```
from random import random
p = float(input("entrer probabilité d'erreur : "))
x = int(input("entrer bit initial : "))
for i ……………
```

4. Estimer la probabilité que le bit reçu au bout de n transmissions soit le même que le bit initial, quand le nombre de transmissions n devient très grand.

B- ÉTUDE MATHEMATIQUE



1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n , b_n et p.

2. Pour n entier naturel, on note $X_n = (a_n \;\; b_n)$.
Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = X_n M$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

4. Calculer $D = P^{-1}M\,P$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0\, M^n$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b. En déduire a_n en fonction de n, p, a_0 et b_0, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

7. En déduire la probabilité que le bit reçu par la n-ième personne soit le même que le bit initial, quand le nombre de transmissions n devient très grand.

II- TEST DE PARITE AVEC UN BIT DE PARITE

Sachant que nous ne pourrons éviter ces déformations de messages transmis, on va étudier un moyen simple et peu « coûteux » pour tenter de détecter des erreurs de transmission.
On transmet un mot de 3 bits sur un canal binaire symétrique sans mémoire. On ajoute à la fin du mot un bit tel que la somme des 4 bits soit paire, c'est-à-dire congru à 0 modulo 2, et on envoie le message de 4 bits.
Pour chaque bit transmis, la probabilité d'erreur est 0,05.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de bits erronés à la réception.

1. Si le message à coder est 101, quel est le message envoyé ?

2. **a.** Ce test de parité détecte-il nécessairement s'il y a erreur(s) ou pas ? Détailler.

b. Si le test détecte une erreur, permet-il de la corriger ?

3. Écrire un algorithme qui prend en entrée 4 bits et écrit en sortie « erreur » s'il en détecte une (et rien sinon).

4. **a.** Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sur la transmission.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur la transmission.

d. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 erreurs sur la transmission.

e. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 erreurs sur la transmission.

5. Calculer la probabilité que le message envoyé soit erroné et non détecté.

6. Sachant que le message est erroné, calculer la probabilité qu'il ne soit pas détecté comme tel.