Catadioptre

Niveau : terminale générale, spécialité.

Lien avec le programme : Géométrie dans l'espace ; positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme. Repérage, représentation paramétrique d'une droite, produit scalaire dans l'espace, vecteur normal d'un plan et équation cartésienne d'un tel.

Lien avec le programme de physique : Ondes lumineuses.

Lien avec Les maths au quotidien : Transport, Repérage.

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur.

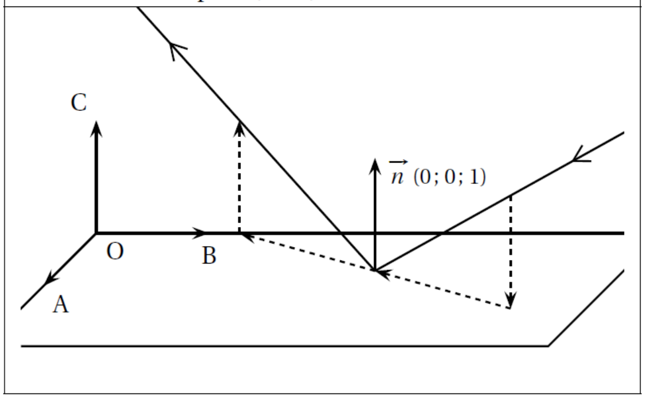
On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé. On utilisera ce repère dans tout l'exercice. Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,'(a\ ;\ b\ ;\ -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,'(-a\ ;\ b\ ;\ c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,'(a\ ;\ -b\ ;\ c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\ (2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b. Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c. Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$. Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $v_3\ (2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $I_2\ (0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $u\ (1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a. Démontrer que le vecteur u est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?