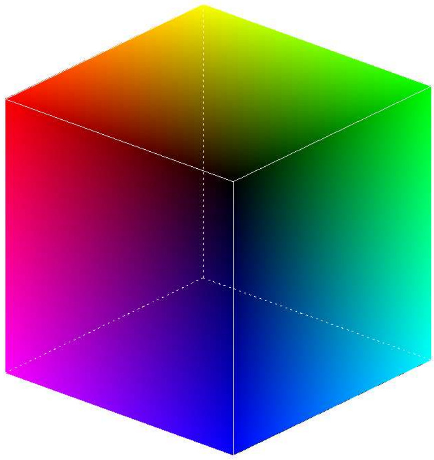
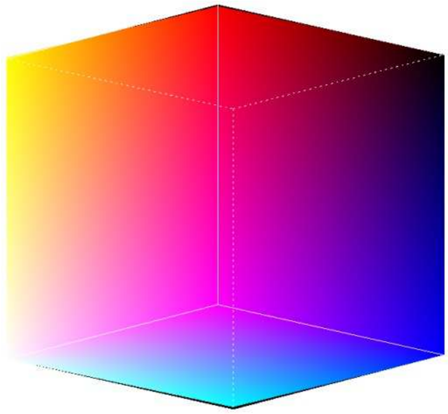
Exercices : dans le cube des couleurs

Niveau : Terminale générale, spécialité
Prérequis : le cube colorimétrique.
Lien avec le programme : vecteurs, repérage, produit scalaire dans l'espace, coordonnées de points et de vecteurs, distance entre deux points, équations cartésiennes de plans, positions relatives droite-plan, plan-plan, angle orienté de vecteurs.
Lien avec « Les maths au quotidien » : **Représentations visuelles**.

Exercice1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal (N ; $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{B}$).
Voici deux vues du cube des couleurs (faces du cube, l'intérieur du cube est caché).
Retrouver et tracer le repère (N ; $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{B}$) dans chacun des cas.

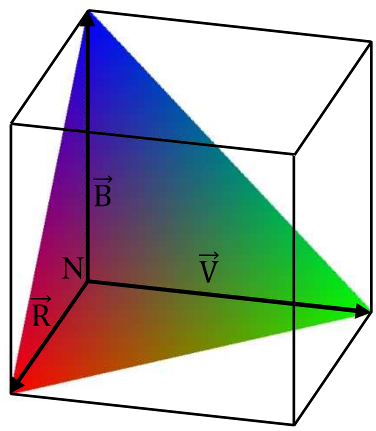




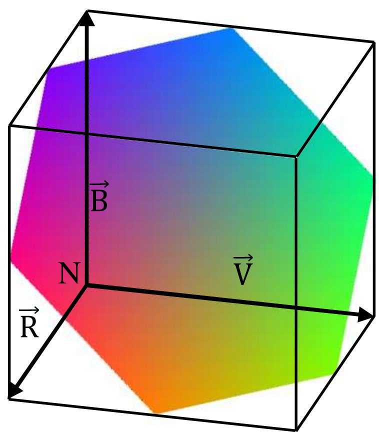
Exercice 2 :

Le cube des couleurs présente un inconvénient … c'est son opacité ! Pour mieux « y voir », il n'y a qu'un moyen, c'est de le « couper ». Voici plusieurs sections planes du cube des couleurs. Les sommets de chacune des sections sont soit des sommets du cube, soit des milieux d'arêtes.
Dans chacune des situations suivantes, on coupe le cube des couleurs par un plan.

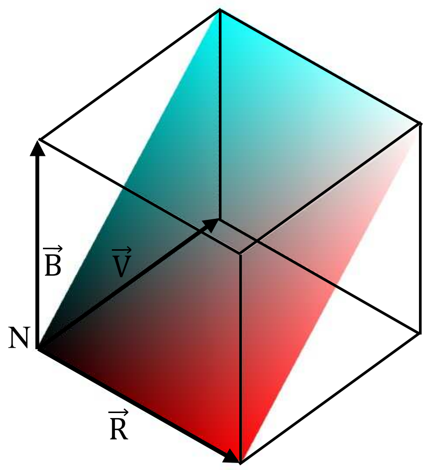
Section 1



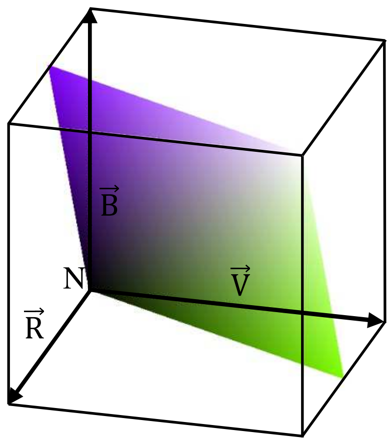
Section 2



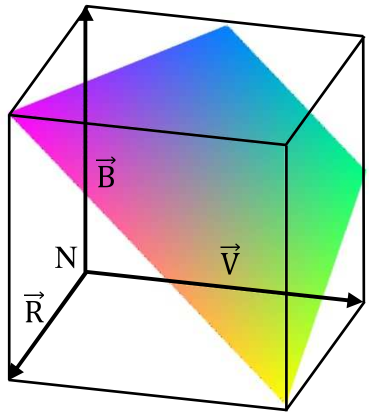
Section 3



Section 4



Section 5



Voici cinq équations de plan :

$P_1 : x + 2y + 2z = 3$ $\quad$ $P_2 : y = z$ $\quad$ $P_3 : 2x + 2y + 2z = 3$
$P_4 : x + y - 2z = 0$ $\quad$ $P_5 : x + y + z = 1$

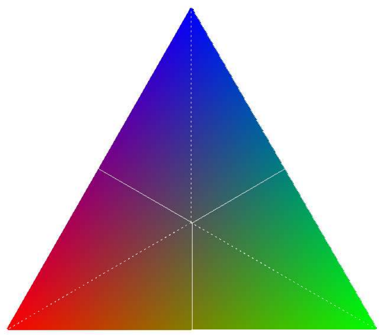
1. Quatre de ces cinq plans correspondent à quatre des cinq sections précédentes.
Associer à chaque équation de ces plans la section correspondante.
Pour la section restante, déterminer une équation cartésienne du plan correspondant.

2. La section 1 s'appelle **triangle de Maxwell**.

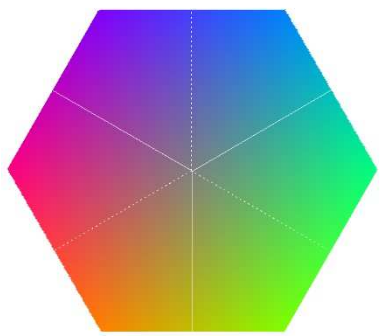
a. Montrer qu'il est orthogonal à l'axe achromatique.

b. Montrer qu'il est parallèle à la section 2 (hexagone).

Le triangle de Maxwell, comme l'hexagone, contient toutes les teintes de couleurs. Sur le triangle de Maxwell ou bien sur l'hexagone, à partir du centre, tous les points situés sur une même demi-droite ont la même teinte. De plus, on voit bien que plus on s'éloigne du centre et plus les couleurs sont pures, vives. Enfin, les couleurs sur l'hexagone sont plus clairs que sur le triangle de Maxwell.



La section 3 contient toutes les couleurs rouges et cyan du cube des couleurs. L'ensemble des couleurs rouges et l'ensemble des couleurs cyan du cube des couleurs sont délimités par l'axe achromatique.



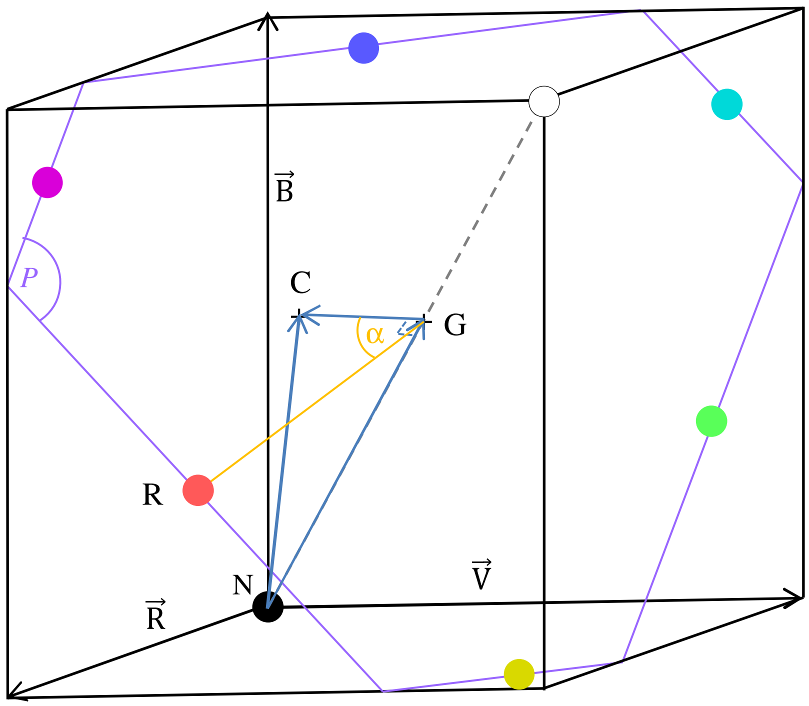
Ces constatations amènent maintenant à des définitions mathématiques de la teinte, de la saturation et de la valeur d'une couleur…

Soit une couleur C du cube des couleurs. On se place dans le repère orthonormal (N ; $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{B}$).

On considère le plan *P* passant par C et orthogonal à l'axe achromatique. Ce plan coupe l'axe achromatique en un point G.

Par la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{NC}$ se décompose comme somme des deux vecteurs $\overrightarrow{NG}$ et $\overrightarrow{GC}$.

$\overrightarrow{NG}$ est la composante achromatique du vecteur $\overrightarrow{NC}$. $\overrightarrow{NG}$ étant orthogonale à $\overrightarrow{GC}$, G est le gris le plus proche de la couleur C. C'est le projeté orthogonal de C sur l'axe achromatique.
$\overrightarrow{GC}$ est la composante chromatique du vecteur $\overrightarrow{NC}$.



On oriente le plan *P* (en regardant de G vers N, on choisit le sens antihoraire…).
On remarque que tous les points « rouges » du plan *P* forment un segment d'extrémité G.

Définitions :

- on appelle **valeur** (ou luminance, luminosité) de la couleur C, la distance NG, c'est-à-dire la norme de la composante achromatique $\overrightarrow{NG}$.

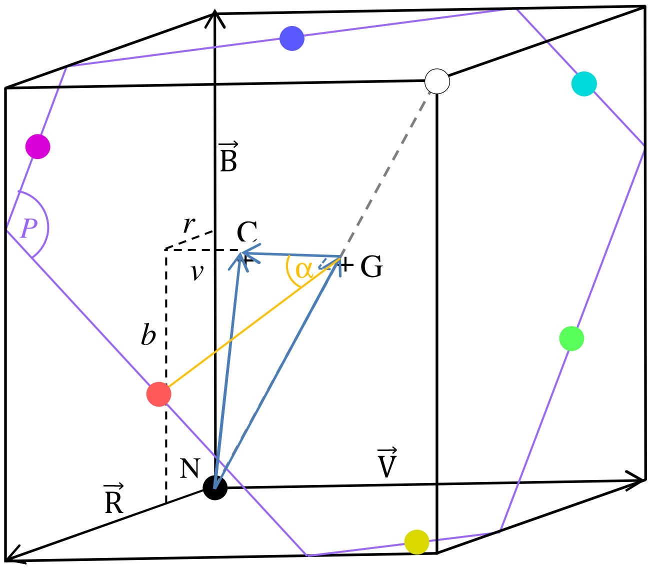
- on appelle **saturation** de la couleur C, la distance GC, c'est-à-dire la norme de la composante chromatique $\overrightarrow{GC}$.

- Pour une couleur C qui n'est pas un gris, on appelle **teinte** de la couleur C, la mesure de l'angle orienté ($\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GR}$) comprise entre 0 et 360 degrés, où R est n'importe quel point « rouge » du plan *P*.

Remarque : d'autres définitions sont possibles (comme par exemple, pour la valeur, la plus grande des trois coordonnées du point C…)

Exercice 3 :

Pour une couleur C(r ; v ; b) donnée, on va déterminer sa valeur, saturation et teinte.



On a vu que :
- la valeur de C est la distance NG où G(g ; g ; g) est le point de l'axe achromatique tel que $\overrightarrow{CG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{NG}$.
- la saturation de C est la distance CG.
- la teinte est une mesure comprise entre 0 et 360° de l'angle ($\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GR}$) avec R un point « rouge » du plan P.

1. Montrer que $g = \dfrac{r+v+b}{3}$

(g moyenne arithmétique de r, v et b).

2. En déduire que la valeur de C est égale à $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(r + v + b)$.

3. Montrer que la saturation est égale à $\sqrt{(r-g)^2 + (v-g)^2 + (v-g)^2} = \sqrt{3}\times\sigma(r,\ v,\ b)$ où $\sigma(r,\ v,\ b)$ désigne l'écart-type des nombres r, v, b.

4. Pour calculer la teinte, on a besoin d'un point rouge dans le plan P.
On rappelle qu'un point rouge est un point du plan d'équation $y = z$ avec $x > y$ (voir section 3).
Une fois que l'on a déterminé les coordonnées d'un point « rouge », expliquer comment on peut déterminer la teinte α de la couleur C.

5. Pour la couleur C(0,7 ; 0,4 ; 0,6), déterminer sa valeur, sa saturation et sa teinte.

6. a. Montrer que, si on multiplie l'intensité de C par un réel positif k (tel que k C appartienne encore au cube des couleurs), la teinte est inchangée, et la valeur et la saturation sont multipliées par k.

b. Montrer que**,** si on ajoute à une couleur un gris de valeur λ, alors la teinte est inchangée et la valeur augmente de λ.

c. Montrer que**,** si on ajoute deux couleurs, la valeur de la couleur résultante est la somme des valeurs des deux couleurs.

Exercice 4 :

Voici, dans un plan frontal, le triangle de Maxwell ainsi que l'hexagone de la section 2.
On a tracé les médiatrices du triangle ainsi que les apothèmes de l'hexagone.
Pour chacune des couleurs C_1 et C_2 du triangle de Maxwell et C_3 et C_4 de l'hexagone, déterminer sa teinte, sa saturation et sa valeur.