Modèle de Leslie

Niveau : Term générale. Maths expertes. Partie A : TP sur ordinateurs. Partie B : en classe ou à la maison.

Lien avec le programme : Phénomènes évolutifs (variation d'une population). Matrice carrée, opérations. Graphe pondéré, matrice d'adjacence associée à un graphe. Utilisation d'un tableur. Algorithme. Suite géométrique et croissance exponentielle (tronc commun).

Lien avec *Les maths au quotidien* : Dynamique de populations (voir « Classes d'âge » dans l'ouvrage).

On s'intéresse à une population de rongeurs ayant une longévité maximale de 3 ans.
On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles.
On suppose que dans cette population, chaque femelle vivant 3 ans donne en moyenne naissance à 9 femelles durant la 1re année, à 11 femelles durant la 2e année et 5 femelles la 3e année.
Cependant, un rongeur sur trois survit au-delà de sa 1re année et seul 25 % de ceux qui survivent la 2e année survivront jusqu'à la 3e année.

Par commodité, une femelle est dite « juvénile » (J) si elle est dans sa première année, « pré-adulte » (P) si elle est dans sa seconde année et « adulte » (A) si elle est dans sa troisième année.

En 2018, cette population de rongeurs comportait 51 juvéniles, 20 pré-adultes et 7 adultes.

On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.
On suppose dans ce modèle que les souris n'ont ni problème de place ni de nourriture.

Partie A : étude de l'évolution de la population **à l'aide d'un tableur**.

1. a. Allez dans « Mes espaces », « Terminale », « maths ES spé » et ouvrie le fichier « Leslie.ods ». Saisir la formule adéquate dans la cellule F2 ; puis les formules ad hoc dans la plage B3:E3, puis recopier vers le bas. **C1**, **C3**

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Total des femelles	Rapport
2	2018	0	51	20	7	78	
3	2019	1	714	17	5	736	9,44
4	2020	2					

Vous écrirez toutes les formules entrées sur votre copie.

b. Déterminer avec le logiciel le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2032. **C2**

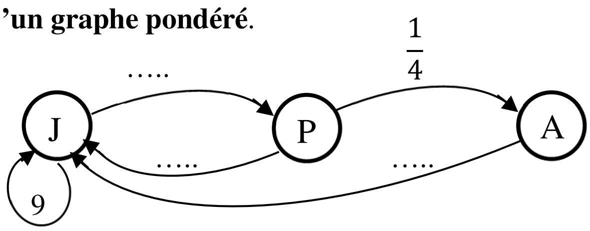
c. Le logiciel montre que la population croît très vite. Pour avoir une idée du type d'évolution de cette population, représenter dans une fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant à la population totale sur plusieurs périodes de 6 années (comme 2018-2023, 2029-2034 ou 2041-2046 par exemple). **C3**
De quel type d'évolution s'agirait-il ? **C1, C5**

d. Pour étayer ou infirmer la conjecture de la question **1. c.**, on décide de faire apparaître dans la colonne G les rapports entre le nombre total de rongeurs femelles et celui de l'année précédente.

- Saisir en G3 la formule donnant, par recopie vers le bas, ce rapport au cours des années suivantes. **C3**
- Quelle conjecture peut-on émettre sur l'évolution de ce rapport ? **C1**
- Expliquer alors pourquoi on peut parler de croissance asymptotiquement exponentielle. **C2, C5**

Partie B : étude de l'évolution de la population **à l'aide d'un graphe pondéré**.

1. a. Compléter le graphe pondéré ci-contre traduisant la situation. **C2**



b. Donner la matrice M de *projection de la population* associée à ce graphe, en choisissant comme ordre des sommets : J, P, A. Elle est construite de manière analogue à la matrice de transition d'un graphe probabiliste.
La matrice M est appelée la matrice de Leslie du modèle. **C1**

c. Si l'on désigne respectivement par j_n, p_n et a_n le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en 2018 + n, justifier que la situation peut se traduire par le système ci-contre : **C2, C5**

$$\begin{cases} j_{n+1} = 9j_n + 11p_n + 5a_n \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{3}j_n \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n \end{cases}$$

d. En notant X_n la matrice ligne $(j_n \quad p_n \quad a_n)$ donnant la répartition de la population en 2018 + n, vérifier que $X_{n+1} = X_n \times M$. **C3**

e. Montrer que $X_2 = X_0 \times M^2$ (sans utiliser la formule de la question suivante). **C4**

f. On admet que pour tout nombre entier naturel n, $X_n = X_0 \times M^n$.
En déduire le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2033. **C4**

2. Compléter l'algorithme suivant, afin qu'il affiche en sortie le nombre de juvéniles l'année 2018 + n, pour un entier naturel non nul n entré par l'utilisateur.
C3

```
Saisir …………
j ← 51
p ← ………
a ← ………
Pour i allant de ……. à …….. :
        d ← j
        j ←………………………
        a ←…………………..…….
        p ← ………………..…….
Afficher ………………………………
```

Point info : le statisticien anglais P. H. Leslie a développé en 1945 ce modèle pour décrire l'évolution du nombre de femelles chez les rongeurs qui provoquent de gros dégâts dans les réserves alimentaires (rats et souris). De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes et son usage est facilité par l'emploi d'ordinateurs.

Dans ce document apparaissent en particulier les compétences suivantes :

COMPETENCES ATTENDUES		Questions de l'énoncé	Appréciation du niveau d'acquisition –			+
C1 **Chercher**	Analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. Emettre une conjecture.	**A.1.a.** **A.1.c.** **A.1.d.** **B.1.b.**				
C2 **Modéliser**	Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de graphes) Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Valider ou invalider un modèle	**A.1.b.** **A.1.c.** **A.1.d.** **B.1.a.** **B.1.c.**				
C3 **Calculer**	Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (tableur, calculatrice). Mettre en œuvre un algorithme simple.	**A.1.a.** **A.1.c.** **A.1.d.** **B.1.d.** **B.2.**				
C4 **Raisonner**	Effectuer des inférences (déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision	**B.1.e.** **B.1.f.**				
C5 **Communiquer**	Opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel. S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.	**A.1.c.** **B.1.c.** **A.1.d.**				

Exemple : il s'agit d'une population de rongeurs ayant une durée de vie maximale de 3 ans. On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles. On suppose que dans cette population, chaque femelle vivant 3 ans donne en moyenne naissance à 9 femelles durant la 1re année, à 11 femelles durant la 2e et 5 femelles la 3e année. Cependant, un rongeur sur trois survit au delà de sa 1re année et seul 25 % de ceux qui survivent la 2e année survivront jusqu'à la 3e année.

Pour une année t, on désigne respectivement par a_t, b_t et c_t les effectifs des femelles dans leur première, deuxième et troisième année, au 1er janvier de l'année t.

Le vecteur $X_t = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \\ c_t \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne effectif de l'année t.

Questions :

1. Montrer que $X_{t+1} = \begin{pmatrix} 9a_t + 11b_t + 5c_t \\ \frac{1}{3}a_t \\ \frac{1}{4}b_t \end{pmatrix}$

2. Vérifier que $X_{t+1} = AX_t$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

3. Soit N_t l'effectif total de la population de rongeurs au 1er janvier de l'année t. Que représentent les coefficients du vecteur $\frac{1}{N_t} X_t$?

4. On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 51 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}$. Calculer « à la main » les coefficients de X_1 et X_2 et les effectifs N_1 et N_2 de toute la population de rongeurs.

5. En utilisant une calculatrice, dresser un tableau dans lequel figurent, pour les années t de 1 à 7, les coefficients du vecteur X_t, les effectifs N_t, les coefficients des vecteurs $\frac{1}{N_t} X_t$ (à 10^{-4} près) et les quotients $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ ($t \neq 7$) (à 10^{-4} près).

Que peut-on conjecturer ?

Remarque : A est une matrice de Leslie.

Réponses :

1. Au 1[er] janvier de l'année $t + 1$, parmi les individus dans leur première année, en moyenne $9a_t$ ont été conçus durant l'année t par des mères dans leur première année, $11b_t$ par des mères dans leur deuxième année et $5c_t$ par des mères dans leur troisième année.

Donc $a_{t+1} = 9a_t + 11b_t + 5c_t$.

Au 1[er] janvier de l'année $t + 1$, les individus dans leur deuxième année sont ceux qui étaient dans leur première année au 1[er] janvier de l'année t et qui ne sont pas morts : $b_{t+1} = \frac{1}{3}a_t$.

Au 1[er] janvier de l'année $t + 1$, les individus dans leur troisième année sont ceux qui étaient dans leur deuxième année au 1[er] janvier de l'année t et qui ne sont pas morts : $c_{t+1} = \frac{1}{4}b_t$.

2. Les règles du produit matriciel donnent le résultat.

3. Les coefficients de $\frac{1}{\mathrm{N}_t}\mathrm{X}_t$ représentent les proportions de chaque classe d'âge dans la population au 1[er] janvier de l'année t.

4. En arrondissant les résultats à l'entier le plus proche on trouve $\mathrm{X}_1 = \mathrm{AX}_0 = \begin{pmatrix} 714 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_2 = \mathrm{AX}_1 = \begin{pmatrix} 6\,638 \\ 238 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\mathrm{N}_1 = 714 + 17 + 5 = 736$ et $\mathrm{N}_2 = 6\,638 + 238 + 4 = 6\,880$.

5.

Année t	1	2	3	4	5	6	7
X_t	$\begin{pmatrix} 714 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6\,638 \\ 238 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 62\,381 \\ 2\,213 \\ 60 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 586\,068 \\ 20\,794 \\ 553 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5\,506\,110 \\ 195\,356 \\ 5\,198 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51\,729\,897 \\ 1\,835\,370 \\ 48\,839 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 486\,002\,337 \\ 17\,243\,299 \\ 458\,842 \end{pmatrix}$
N_t	736	6 880	64 654	607 415	5 706 664	53 614 106	503 704 478
$\frac{1}{\mathrm{N}_t}\mathrm{X}_t$	$\begin{pmatrix} 0{,}9701 \\ 0{,}0231 \\ 0{,}0067 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9648 \\ 0{,}0346 \\ 0{,}0006 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9648 \\ 0{,}0342 \\ 0{,}0009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9649 \\ 0{,}0342 \\ 0{,}0009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9649 \\ 0{,}0342 \\ 0{,}0009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9649 \\ 0{,}0342 \\ 0{,}0009 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}9649 \\ 0{,}0342 \\ 0{,}0009 \end{pmatrix}$
$\frac{\mathrm{N}_{t+1}}{\mathrm{N}_t}$	9,3478	9,3974	9,3949	9,3950	9,3950	9,3950	

On conjecture que la proportion de chaque classe d'âge dans la population tend à se stabiliser (vers des valeurs dont 0,9649, 0,0342 et 0,0009 sont des valeurs approchées) et que la population tend à être multipliée par un même nombre chaque année, proche de 9,395.

Avec des maths du supérieur, on démontre qu'en effet, ces proportions convergent. On dit que la croissance de la population est asymptotiquement exponentielle.

(Modèle de Leslie). *corrigé*

1. a. (Réaliser cette feuille de calcul. Saisir la formule adéquate dans la cellule F2 ; puis les formules adéquates dans la plage A3 :F3, puis recopier vers le bas.)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Total des femelles	Rapport
2	2016	0	30	50	50	130	
3	2017	1	800	15	20	835	6,42
4	2018	2	290	400	6	696	0,83
5	2019	3	2460	145	160	2765	3,97
6	2020	4	2470	1230	58	3758	1,36
7	2021	5	7960	1235	492	9687	2,58

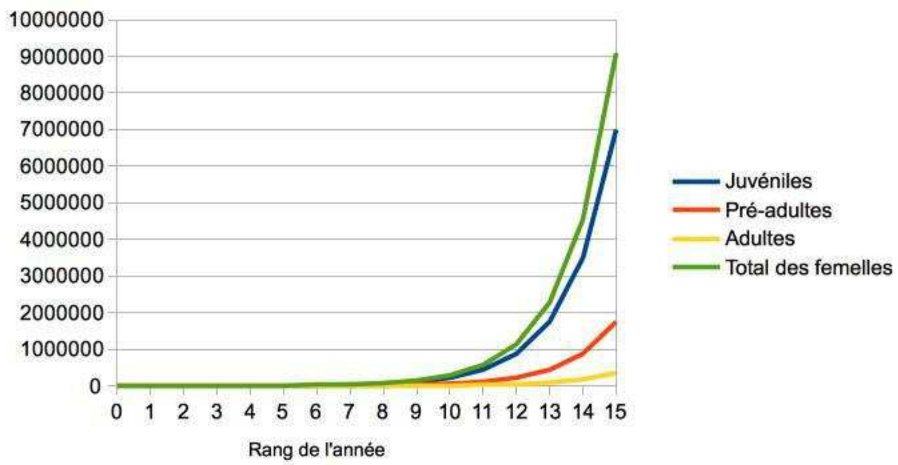
8	2022	6	12330	3980	494	16804	1,73
9	2023	7	28820	6165	1592	36577	2,18
10	2024	8	52910	14410	2466	69786	1,91
11	2025	9	111120	26455	5764	143339	2,05
12	2026	10	216370	55560	10582	282512	1,97
13	2027	11	439180	108185	22224	569589	2,02
14	2028	12	871350	219590	43274	1134214	1,99
15	2029	13	1750280	435675	87836	2273791	2,00
16	2030	14	3492410	875140	174270	4541820	2,00
17	2031	15	6993540	1746205	350056	9089801	2,00

Précisons certaines formules :

F2 = SOMME(C2:E2) A3= A2 + 1 B3 =B2 + 1
C3 = 6*D2 + 10*E2 D3 = 0,5*C2 E3 = 0,4*D2
F3 = SOMME(C3:E3)

b. En 2031, il y aura 6 993 540 rongeurs juvéniles, 1 746 205 pré-adultes, 340 056 rongeurs adultes.

c. Pour avoir une idée de l'évolution de cette population, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux trois catégories ainsi qu'à la population totale.



D'après les courbes précédentes, la croissance des populations de rongeurs est exponentielle.

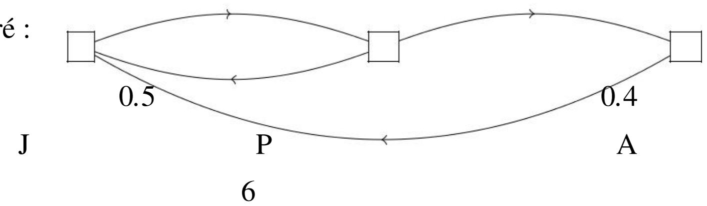
d) Dans la colonne G, on décide de faire apparaître les rapports entre le nombre total de rongeurs femelles et celui de l'année précédente.

- Dans la cellule G3, on tape = F3/F2. Puis, on recopie vers le bas, pour obtenir les rapports au cours des années suivantes.

- D'après le tableau, il semblerait qu'à partir de 2029, le rapport est environ égal à 2. (La représenter dans une nouvelle fenêtre graphique.)

- À partir de 2029, on peut estimer que la population totale double tous les ans. Elle s'identifie donc à une suite géométrique de raison 2 et la croissance est bien exponentielle.

2. Avec un graphe pondéré :



b. La matrice de transition M associée construite de manière analogue à celle d'un graphe probabiliste en choisissant comme ordre des sommets : J, P, A est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 6 & 0 & 0,4 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Posons respectivement par j_n, p_n et a_n le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en 2016 + n. Par hypothèse, chaque femelle pré-adulte donne naissance à 6 femelles en moyenne et chaque femelle adulte donne naissance à 10 femelles en moyenne, d'où le nombre de juvéniles l'année suivante est $j_{n+1} = 6\,p_n + 10\,a_n$. De même, avec les deux données suivantes de l'énoncé, on déduit que $p_{n+1} = 0.5\,j_n$ et $a_{n+1} = 0.4\,p_n$. En résumé, on a donc le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 6p_n + 10a_n \\ p_{n+1} = 0,5j_n \\ a_{n+1} = 0,5p_n \end{cases}$$

d) En notant X_n la matrice ligne $j_n \;\; p_n \;\; a_n$ donnant la répartition de la population en 2016 + n. On note que

$$X_n \times M = \begin{bmatrix} j_n & p_n & a_n \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0.4 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6p_n + 10a_n & 0.5j_n & 0.4p_n \end{bmatrix}$$

hi

$$= \; j_{n+1} \;\; p_{n+1} \;\; a_{n+1}$$

$$= \; X_{n+1}$$

D'où $X_{n+1} = X_n \times M$.

e) On en déduit que $X_2 = X_1 \times M = (X_0 \times M) \times M = X_0 \times (M \times M) = X_0 \times M^2$.

f) On admet que pour tout nombre entier naturel n, $X_n = X_0 \times M^n$. Ainsi, en 2031 = 2016 + 15, on a

$$X_{15} = X_0 \times M^{15} = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0.4 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, en 2031, il y aura 6 993 540 rongeurs juvéniles, 1 746 205 pré-adultes, 340 056 rongeurs adultes.

 {{[vert]Printemps des maths / du 3 au 7 avril[/vert]}}

- [brun]{{Conférence de Bertrand Hauchecorne}}[/brun]

<img3588|left> {{[vert]DES MATHS ET DES MOTS[/vert]}}
[brun]Conférence le lundi 3 avril 2017[/brun]. Quelle relation y a-t-il entre un grand nombre de mots mathématiques et leurs homonymes du langage courant ? D'où viennent ces mots ? Bertrand Hauchecorne nous donnera des éléments de réponse lors de cette conférence.
 Plus d'info [ici->1412]

- [brun]{{Conférence de Matthieu Colonval}}[/brun]

<img3585|left> {{ [vert]LES MATHS SONT PARTOUT[/vert] }}
[brun]Conférence le jeudi 6 avril 2017[/brun]. Au travers d'une journée de la vie d'une famille, Matthieu Colonval montrera comment on trouve des mathématiques enseignées au collège et au lycée.
 Plus d'info [ici->1409]

- [brun]{{Conférence de Valério Vassalo}}[/brun]

{{[vert]PAROLES DE DECHIFFREURS[/vert]}}
[brun]Conférence le vendredi 7 avril 2017[/brun]. À l'aide de quelques exemples simples inspirés par des phrases que des mathématiciens actuels de renom lui ont inspirées, Valério Vassalo tentera d'illustrer quelques volets de la recherche qui est en train de ce faire et les états d'âme de ces chercheurs qui ont décidé de consacrer toute leur vie à résoudre des problèmes mathématiques.
 Plus d'info [ici->1411]