Un train primitif

Niveau : term générale spé, 1re STI2D, maths complémentaires.
Lien avec le programme : Primitive d'une fonction sur un intervalle. Activité de découverte (Delagrave BTS p. 28)
Lien avec Les maths au quotidien : transport.

On s'intéresse à la distance parcourue par un train en un temps donné, lorsqu'il se déplace sur un tronçon de ligne ferroviaire droite. Sur ce tronçon, le train a un mouvement rectiligne.
La position du train à l'instant t (où t est exprimé en s), exprimée en m, est décrite par son abscisse $x(t)$ sur un axe muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath})$.
La vitesse instantanée du train à l'instant t, exprimée en $m.s^{-1}$, est $v(t) = x'(t)$ et son accélération instantanée, exprimée en $m.s^{-2}$, est $a(t) = v'(t)$.

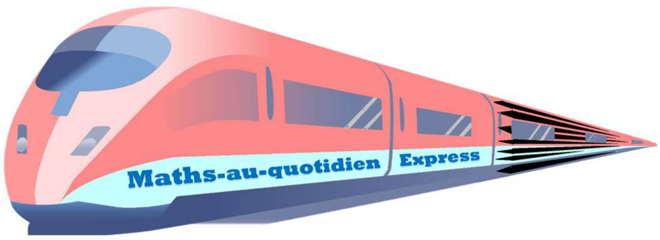
1. On suppose que lors des vingt premières secondes, la position du train est décrite par : $x(t) = \dfrac{t^3}{75} + \dfrac{t^2}{50}$.

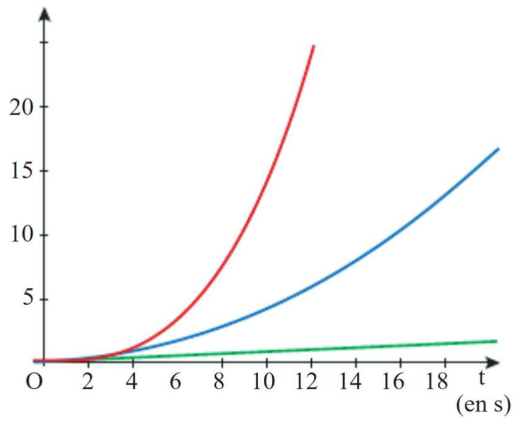
a. Où se situe le train au temps $t = 0$?

b. Quelle distance, arrondie au dixième de mètre, aura-t-il parcourue au bout de ces vingt secondes ?

c. Pour tout $t \in [0\ ;\ 20]$, déterminer $v(t)$ et $a(t)$. Préciser $v(20)$ en $km.h^{-1}$ et $a(20)$ en $m.s^{-2}$.

d. Retrouver les courbes représentatives de x, v et a sur le graphique ci-contre :





2. Le train passe ensuite de 60,48 $km.h^{-1}$ (soit 16,8 $m.s^{-1}$) à 90 $km.h^{-1}$ (soit 25 $m.s^{-1}$) en 20 s, avec une accélération **constante** a_0. On se demande quelle distance il a parcourue pendant cette durée.

a. Montrer que $a_0 = 0{,}41\ m.s^{-2}$.

b. Proposer quelques fonctions v telles que, pour tout $t \in [20\ ;\ 40]$, $v'(t) = a_0$.

c. Parmi ces fonctions, déterminer celle qui satisfait la contrainte $v(40) = 25$. On note cette fonction v_0.

d. Proposer quelques fonctions x telles que, pour tout $t \in [20\ ;\ 40]$, $x'(t) = v_0(t)$.

e. Répondre à la question posée en calculant $x(40) - x(20)$.

3. Le train roule ensuite à une vitesse constante égale 90 $km.h^{-1}$ pendant 60 s.

a. Donner l'expression de $a(t)$ en $m.s^{-2}$, de $v(t)$ en $m.s^{-1}$, et une expression possible de $x(t)$ en m, pour tout $t \in [40\ ;\ 100]$.

b. Quelle est la distance parcourue pendant cette minute ?

1. a. Position du train à t = 0

a. $x(0) = \frac{0^3}{75} + \frac{0^2}{50} = 0$. Donc, le train est au départ du tronçon au temps 0.

b. Distance parcourue en 20 secondes

$x(20) = \frac{20^3}{75} + \frac{20^2}{50} = \frac{344}{3} \approx 114.666666667$ Donc le train a parcouru **114,67 mètres environ**

c. Vitesse et accélération

La vitesse est la dérivée de x : $v(t) = \frac{3t^2}{75} + \frac{2t}{50} = \frac{t^2}{25} + \frac{t}{25}$

L'accélération est la dérivée de v : $a(t) = \frac{2t}{25} + \frac{1}{25}$

La vitesse à $t = 20$: $v(20) = \frac{20^2}{25} + \frac{20}{25} = \frac{84}{5} = 16{,}8$ m.s^{-1} = 60,48 km/h.

$a(20) = \frac{2\times 20}{25} + \frac{1}{25} = \frac{41}{25} = 1{,}64$ m.s^{-2}

a courbe verte ; v courbe bleue et x courbe rouge.

2. Le train passe ensuite de 60,48 km.h^{-1} (soit 16,8 m.s^{-1}) à 90 km.h^{-1} (soit 25 m.s^{-1}) en 20 s, avec une accélération **constante** a_0. On se demande quelle distance il a parcourue pendant cette durée.

a. $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25 - 16{,}8}{20} = 0{,}41$ m.s^{-2}.

b. On peut proposer $v(t) = a_0\, t + C = 0{,}41\, t + C$, où C est n'importe quelle constante réelle.

c. $v(40) = 0{,}41\times 40 + C = 25$ donc $C = 8{,}6$. On note cette fonction v_0. Donc $v_0.(t) = 0{,}41\, t + 8{,}6$

d. On peut proposer $x(t) = 0{,}41\,\frac{t^2}{2} + 8{,}6\, t + C_2 = 0{,}205\, t^2 + 8{,}6\, t + C_2$, où C_2 est n'importe quelle constante réelle.

e. $x(40) - x(20) = 0{,}205\times 40^2 + 8{,}6\times 40 + C_2 - (0{,}205\times 20^2 + 8{,}6\times 20 + C_2)$
$= 0{,}205\times 40^2 + 8{,}6\times 40 + C_2 - 0{,}205\times 20^2 - 8{,}6\times 20 - C_2$
$= 418$

Le train a parcouru 418 m de plus.

Remarque : on n'a pas eu besoin de calculer la constante C_2 car en faisant la différence, elle s'élimine, mais si on voulait la calculer, on l'obtiendrait avec $x(20) = 0{,}205\times 20^2 + 8{,}6\times 20 + C_2 = \frac{344}{3}$ donc $C_2 = -\frac{418}{3}$.

3. Le train roule ensuite à une vitesse constante égale 90 km.h^{-1} pendant 60 s.

a. $a(t) = 0$ m.s^{-2}, $v(t) = 25$ m.s^{-1}, et pour tout $t \in [40 ; 100]$, $x(t) = 25t + C_3$ où C_3 est une constante réelle.

b. $x(100) - x(40) = 25\times 100 + C_3 - (25\times 40 + C_3) = 1\,500$.

La distance parcourue pendant cette minute est de 1 500 mètres.