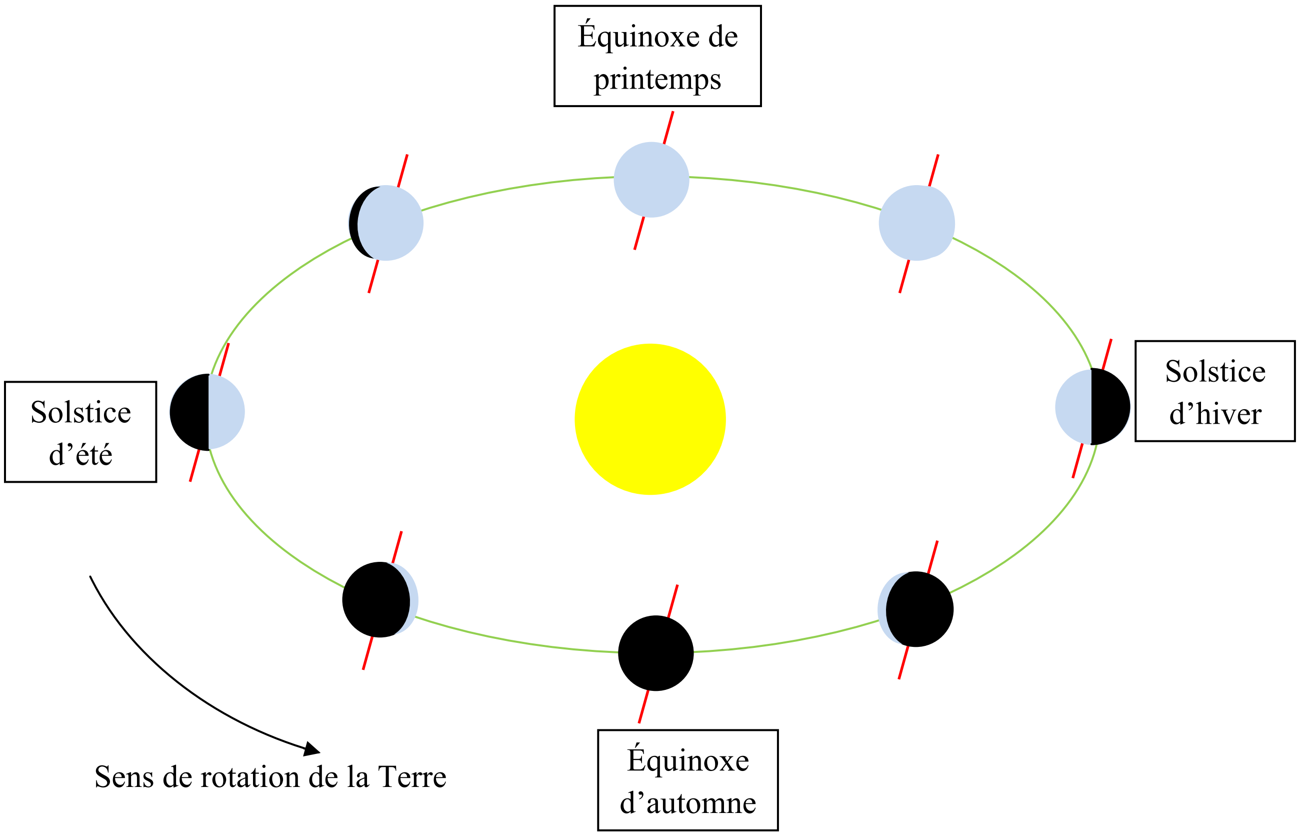
DURÉE DU JOUR
EN FONCTION DE LA DATE ET DE LA LATITUDE

Nous allons nous intéresser à la durée du jour, prise ici dans le sens de période d'éclairement par le Soleil dans une journée de 24 h, en un lieu donné de la Terre.

Comme chacun sait, notre planète tourne autour du Soleil, en décrivant une orbite elliptique (quasiment circulaire). Le plan dans lequel s'effectue son orbite s'appelle le plan de l'écliptique.
La Terre tourne également sur elle-même autour de son axe Sud-Nord, incliné d'environ 23,44° par rapport à un vecteur normal (c'est-à-dire orthogonal…) au plan de l'écliptique.



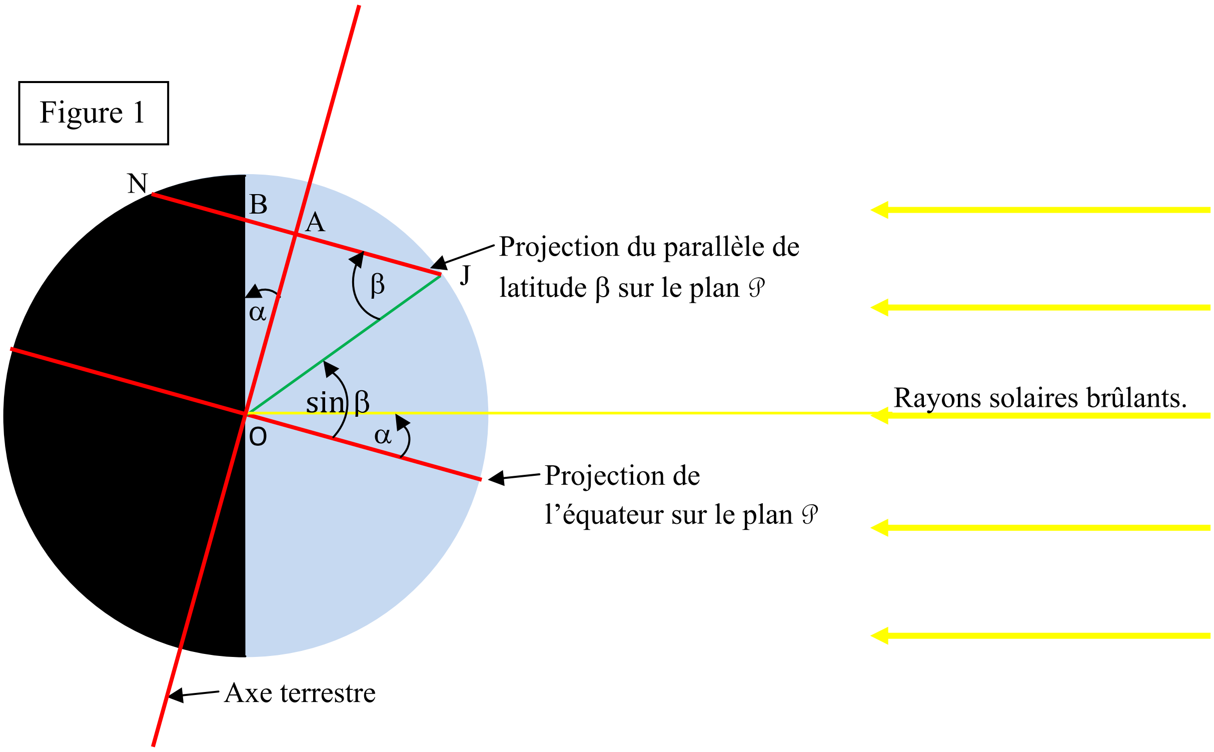
Pour obtenir une formule donnant (approximativement) la durée du jour dans un lieu donné, il est utile de faire quelques hypothèses simplificatrices :
❖ On suppose la Terre sphérique (en fait elle est légèrement aplatie aux pôles).
❖ On suppose l'orbite terrestre circulaire.
❖ On néglige les phénomènes de précession des équinoxes et de nutation (voir ailleurs pour plus de détails…).
❖ On suppose qu'une année comporte 365 jours de 24 h chacun.
❖ On suppose que, durant une journée de 24 h, la Terre tourne sur elle-même sans modifier la position de son axe par rapport au Soleil.
❖ On suppose que le Soleil est un point.

Toutes les mesures d'angles seront exprimées en degrés. Une latitude sera un nombre strictement compris entre –90 et 90 (degrés).

Représentons une coupe de la Terre par un plan $\mathcal{P}$ passant par son centre O et parallèle aux rayons du Soleil :

Plaçons-nous sur un parallèle de latitude choisie β, à un instant donné.

Figure 1



O : centre de la Terre	A : centre du parallèle de latitude β
M : point du parallèle de latitude β où le Soleil se lève	S : point du parallèle de latitude β où le Soleil se couche
J : point du parallèle de latitude β où il est midi	N : point du parallèle de latitude β où il est minuit
B : point d'intersection de (NJ) et (MS)	$\beta \in]-90 ; 90[$

Vue « de dessus » de la calotte sphérique délimitée par le parallèle de latitude β.

Figure 2

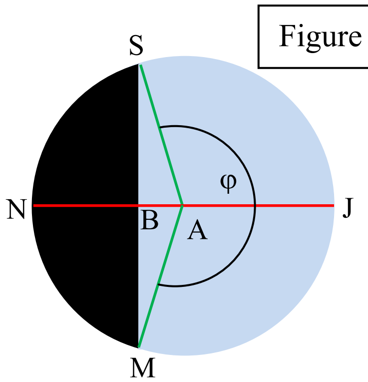
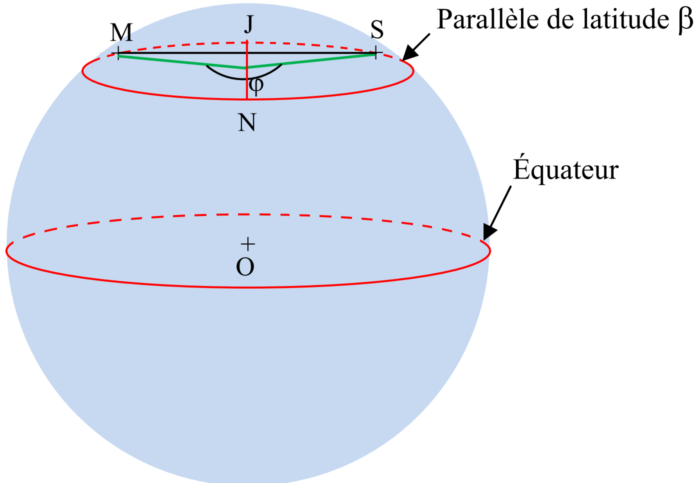


Figure 3



Quelle sera la durée du jour dans un lieu situé à une latitude β ?

Pour répondre à cette question, on va calculer φ.

Minuit et Midi (solaires) étant chacun situé à durée égale du lever et du coucher de Soleil, et la Terre tournant sur elle-même à vitesse constante, les points N et J sont sur la médiatrice du segment [MS]. On en déduit que la médiatrice du segment [MS] est la droite (NJ) et donc les droites (MS) et (NJ) sont perpendiculaires. En particulier, le triangle ABS est rectangle en B.

Soit r le rayon du parallèle de latitude β.

L'angle $\widehat{\text{BAS}}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{\text{JAS}}$, lui-même étant égal à $\frac{1}{2}\varphi$.

On a donc $\widehat{\text{BAS}} = 180 - \frac{\varphi}{2}$.

On a donc, dans le triangle rectangle BAS rectangle en B, $\frac{\text{AB}}{\text{AS}} = \cos\left(\widehat{\text{BAS}}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)$.

Puisque AS = r, on obtient AB = $r\cos\left(180 - \frac{\varphi}{2}\right)$. **(1)**

Désignons par R le rayon de la Terre.

Dans le triangle OJA rectangle en J (figure 1), on a :

$\frac{\text{AJ}}{\text{OJ}} = \cos\beta$, soit AJ = OJ $\cos\beta$, soit $r = \text{R}\cos\beta$. **(2)**

$\frac{\text{OA}}{\text{OJ}} = \sin\beta$, soit OA = OJ $\sin\beta$, soit OA = R $\sin\beta$. **(3)**

(1) et **(2)** amènent AB = $\text{R}\cos\beta\cos\left(180 - \frac{\varphi}{2}\right)$. **(4)**

Dans le triangle rectangle OAB rectangle en A (figure 1), $\frac{\text{AB}}{\text{OA}} = \tan\alpha$, soit AB = OA $\tan\alpha$. **(5)**

De **(5)** et **(3)**, on déduit AB = R $\sin\beta\tan\alpha$. **(5)**

(4) et **(5)** amènent $\text{R}\cos\beta\cos\left(180 - \frac{\varphi}{2}\right) = \text{R}\sin\beta\tan\alpha$ et donc $\cos\left(180 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\text{R}\sin\beta\tan\alpha}{\text{R}\cos\beta}$

soit $\cos\left(180 - \frac{\varphi}{2}\right) = \tan\beta\tan\alpha$.

$\widehat{\text{BAS}} = 180 - \frac{\varphi}{2}$ appartenant à [0 ; 180], on a $180 - \frac{\varphi}{2} = \text{Arccos}(\tan\beta\tan\alpha)$.

On déduit que $\varphi = -2\,\text{Arccos}(\tan\beta\tan\alpha) + 360$.

Appelons D la durée d'ensoleillement en heures correspondant à l'angle φ.

La Terre tournant sur elle-même à vitesse constante, on a $D = 24\times\frac{\varphi}{360}$.

Au bout du compte on trouve donc $D = \frac{24}{360}\times(-2\times\text{Arccos}(\tan\beta\times\tan\alpha) + 360)$, soit :

$$\boxed{D = -\frac{2}{15}\times\text{Arccos}(\tan\beta\times\tan\alpha) + 24}$$

Par exemples :

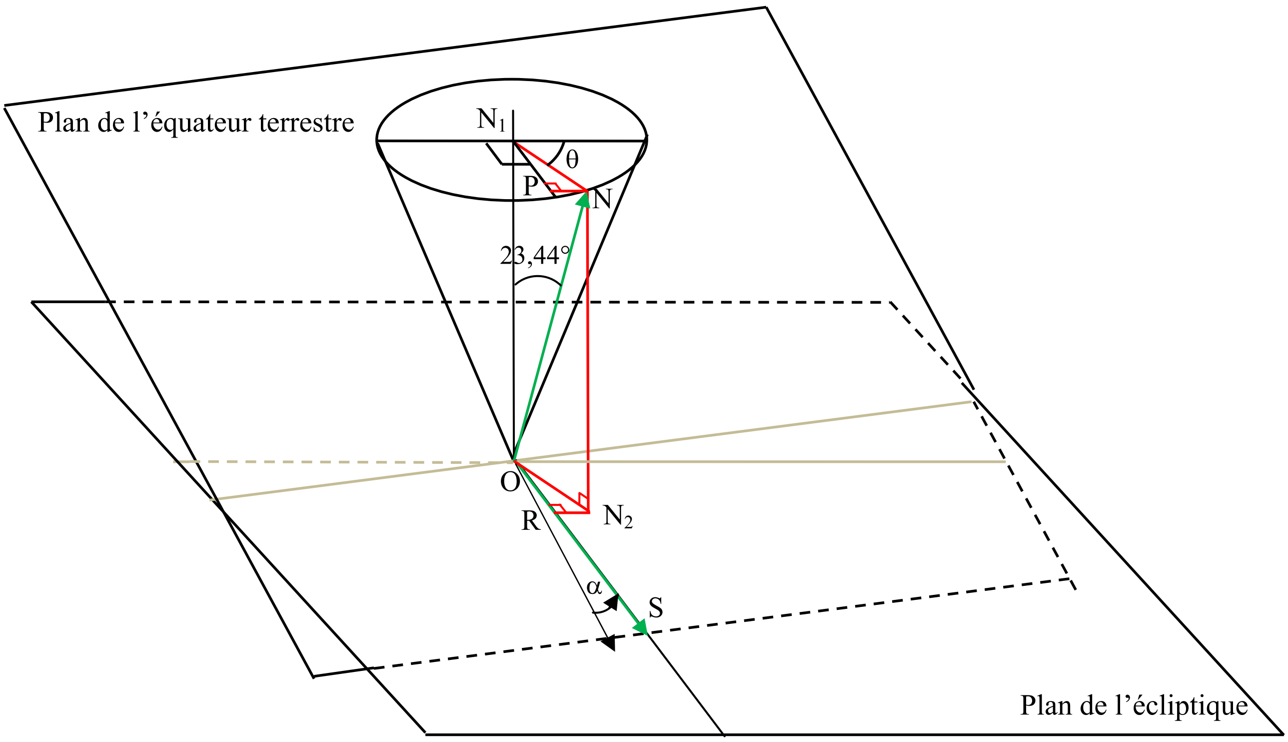
À l'équinoxe de printemps, $\alpha = 0$ et donc $D = 12$ (heures).
Au solstice d'été, $\alpha = 23{,}44°$. Plaçons-nous à Orléans (latitude : 47,9°). On obtient $D \approx 15,\ 82$.
$0{,}82/100\times60 \approx 50$. Au solstice d'été à Orléans, la durée du jour donnée par la formule précédente est d'environ 15 h 50 min.

On voit que pour calculer la durée du jour, il suffit de connaître deux paramètres : la latitude du lieu et l'angle α selon lequel « le Soleil tombe sur le plan de l'équateur » à la date choisie.
La valeur de cet angle est connue aux équinoxes : il vaut 0° ;
aux solstices : il vaut 23,44° en été et –23,44° en hiver.

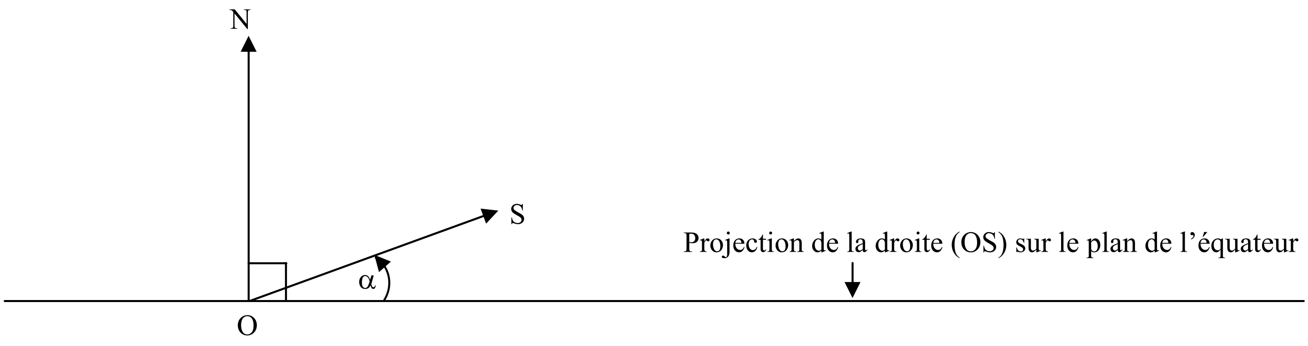
Mais aux autres dates ?

Au cours de la course inexorable de notre planète autour de son étoile, l'axe de rotation de la Terre conserve son inclinaison constante de 23,44° par rapport à une normale au plan de l'écliptique. Vu d'un point de l'espace, cet axe tournera autour de cette normale et par conséquent décrira un cône de révolution de centre le centre de la Terre et dont le demi-angle au sommet est de 23,44°.

Plaçons-nous une année donnée à l'équinoxe de printemps. Ce sera la date 0. Plaçons-nous maintenant à une date *d,* c'est-à-dire *d* jours après l'équinoxe de printemps. Appelons θ l'angle décrit par la Terre sur son orbite pendant ces *d* jours.



O est le centre de la Terre, N l'extrémité du vecteur unité d'origine O et dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre et $\overrightarrow{OS}$ le vecteur unité dirigé vers le Soleil. L'angle α entre le plan de l'équateur et la droite (OS) est aussi l'angle complémentaire de l'angle $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{ON}\right)$.



Nous avons $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OS}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos(\widehat{SON}) = \cos(\widehat{SON}) = \sin \alpha$.
Donc $\sin \alpha = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON}$.

Décomposons $\overrightarrow{ON}$ en la somme de $\overrightarrow{ON_1}$ dirigé orthogonalement au plan de l'écliptique et de $\overrightarrow{ON_2}$ « situé » dans le plan de l'écliptique.
$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OS} \cdot (\overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2}) = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON_2} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON_2}$ puisque $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{ON_1}$ sont orthogonaux.

On a $\|\overrightarrow{ON_2}\| = \sin(23{,}44)$.

$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{ON_2} = \|\overrightarrow{OS}\| \times \|\overrightarrow{ON_2}\| \times \cos(\widehat{RON_2}) = \sin(23{,}44) \times \cos(\widehat{RON_2})$.
Mais $\cos(\widehat{RON_2}) = \cos(\widehat{PN_1N}) = \sin \theta$ car $\widehat{PN_1N}$ et θ sont complémentaires.

On obtient : $\sin \alpha = \sin(23{,}44) \times \sin \theta$.

On obtient la super formule :
$$D = -\frac{2}{15} \times \text{Arccos}(\tan \beta \times \tan(\text{Arcsin}(\sin(23{,}44) \times \sin \theta)) + 24$$

Ce n'est pas tout-à-fait fini :

Exprimons θ en fonction de d pour une année de 365 jours :

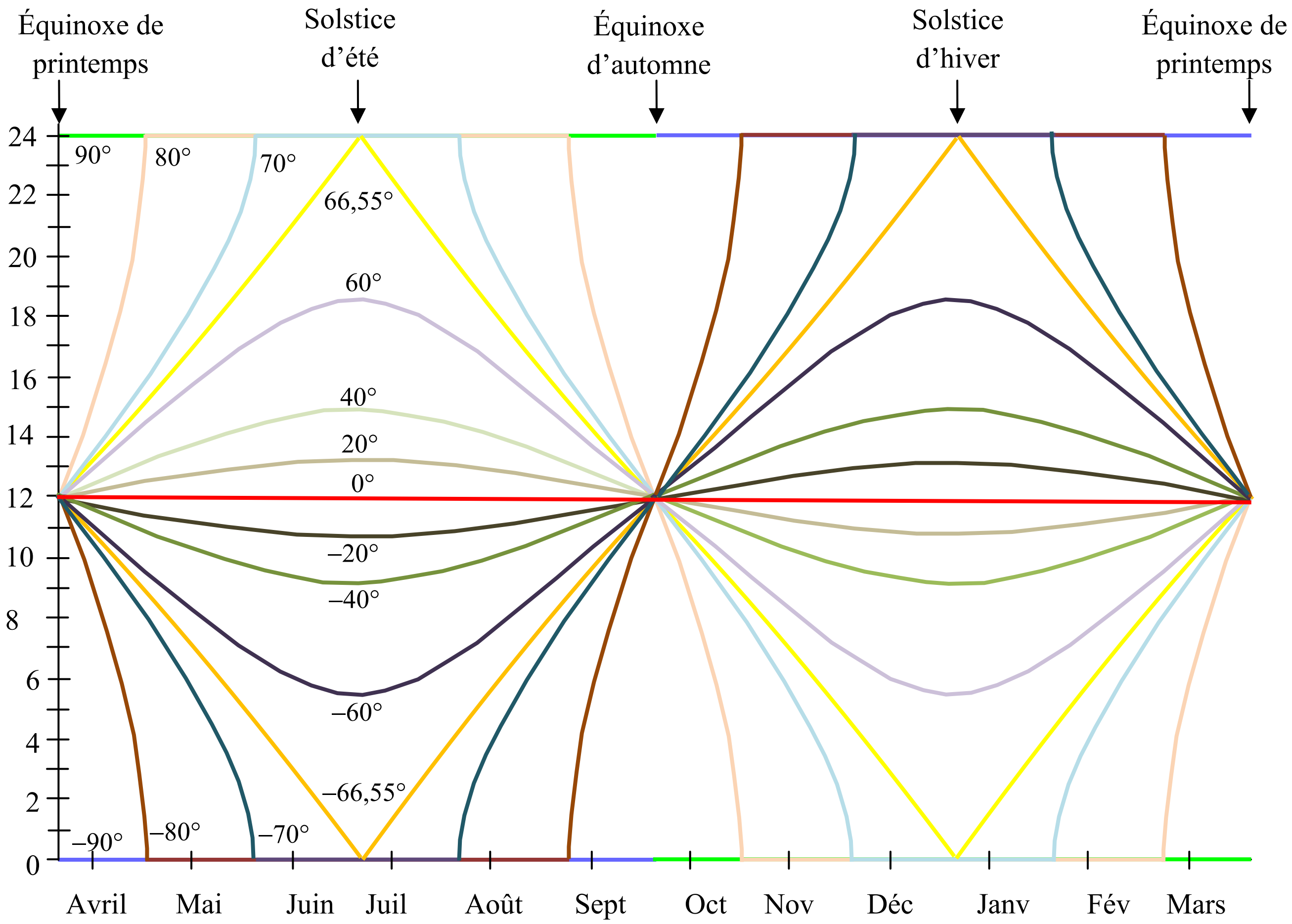
$$\theta = \frac{d}{365} \times 360.$$

On obtient alors l'ultra formule :

$$D = -\frac{2}{15} \times \text{Arccos}\left(\tan \beta \times \tan\left(\text{Arcsin}\left(\sin(23{,}44) \times \sin\left(\frac{d}{365} \times 360\right)\right)\right)\right) + 24$$

$$\boxed{D = -\frac{2}{15} \times \text{Arccos}\left(\tan \beta \times \tan\left(\text{Arcsin}\left(\sin(23{,}44) \times \sin\left(\frac{72}{73}\, d\right)\right)\right)\right) + 24}$$

Voici des courbes représentant la durée du jour en fonction de la date, pour différentes valeurs de la latitude β (la formule ne s'applique pas pour $\beta = 90°$ ou $\beta = -90°$) :



Remarques :

- À la latitude 0°, on est sur l'équateur. La durée d'éclairement par le Soleil est de 12 h par jour toute l'année.
- Le cercle polaire arctique se situe à une latitude d'environ 66,55°. Sur ce parallèle, la durée d'éclairement par le Soleil semble avoir un comportement affine par morceaux (pas tout-à-fait en réalité).
- À la latitude 90°, on est au pôle Nord. La durée d'éclairement par le Soleil est une fonction constante par morceaux : elle est de 24 h pendant six mois puis de 0 h pendant six mois.