

MONTEE D'ESCALIER

Niveau : terminale générale, Maths expertes.

Lien avec le programme : raisonnement par récurrence, matrices carrées, matrices colonnes : opérations, matrice inverse d'une matrice carrée, exemples de calcul de la puissance n -ième d'une matrice carrée d'ordre 2, suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n$, étude de la convergence.

Lien avec Les maths au quotidien : thème Nombre d'or.

Soit n un entier naturel.

Un escalier comporte n marches. Je monte les marches par une ou par deux. On appelle u_n le nombre de façons pour moi de monter cet escalier. On convient que $u_0 = 1$.



1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 en écrivant dans chaque cas toutes les montées d'escalier possibles.
2. En séparant les montées d'escalier en celles qui commencent sur la première marche et celles qui commencent sur la seconde marche, justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Calculer u_{16} à l'aide de votre calculatrice (j'ai remarqué qu'un escalier d'habitation comporte souvent 16 marches...).
6. Soit $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. φ est le nombre d'or. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & 1 - \varphi \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 - \varphi & \sqrt{5} \\ 2 + \varphi & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
 - a. Vérifier que Q est la matrice inverse de P .
 - b. Calculer la matrice $D = QAP$.
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nQ$.
7. Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n .
8. Déterminer, si existence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
9. a. Pour $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$, calculer à l'aide de la calculatrice $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, puis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, à 10^{-3} près. Que peut-on conjecturer ?
 - b. Démontrer votre conjecture.