Pression atmosphérique

Niveau : terminale générale, spécialité.

Lien avec le programme : étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite, algorithme de seuil. Équation différentielle $y' + ay = b$, fonctions logarithme népérien et exponentielle, exponentielle de base a, algorithmique.

Lien avec Les maths au quotidien : Nature.

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
Florin Périer a constaté que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.
Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.
Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).
On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 *hPa au niveau de la mer.*

Partie A : une règle simplifiée

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant cette règle :

altitude (en mètre)	0	800	1 500	2 000
pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25			

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée. Ainsi $u_0 = 1\ 013{,}25$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Écrire l'expression de u_n en fonction de n. Quel type de suite reconnait-on ?

c. Déterminer l'altitude, exprimée en mètre, à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

Partie B : la formule barométrique

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}12y = 0$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hPa est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1\ 013{,}25$.

1. a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

b. Démontrer que la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1\ 013{,}25$ est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 1\ 013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x}$

2. En utilisant la fonction f :

a. Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.

b. Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.

3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n. Justifier qu'avec ce modèle, la suite (v_n) est géométrique.

Partie C : la formule du nivellement barométrique

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes. Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui à l'altitude x **en kilomètre** associe la pression atmosphérique en hPa : $p(x)= 1013{,}25\,\mathrm{e}^{5{,}255\times\ln\left(1-\frac{6{,}5x}{288{,}15}\right)}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Calculer la pression atmosphérique (en hPa, arrondie à l'unité) au sommet de l'Everest, culminant à 8 848 mètres.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant en utilisant la fonction p, de façon à ce qu'il affiche en sortie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa.

$A \leftarrow 0$

$P \leftarrow 1\,013{,}25$

Tant que ………. **faire**

  $A \leftarrow A + 0{,}1$

  $P \leftarrow$ ………..

Afficher ………….