Voyage Voyage,
plus loin(in) que la nuit et le jour

Niveau : terminale générale, spécialité (très technique)

Lien avec le programme : dérivée de $\sqrt{u}$. Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Unique primitive prenant une condition initiale. Fonction logarithme népérien. Acquisition d'automatismes de calcul, utilisation d'un outil numérique.

Lien avec le programme de physique : temps et relativité restreinte.

Lien avec Les maths au quotidien : Astronomie. Société (méthode pour vieillir moins vite).

Nous sommes en 2177. Le vol spatial habité n°314159 de la compagnie « Maths-au-quotidien Spaceways » prend son départ à destination de Proxima B, exoplanète habitable de l'étoile Proxima Centauri, découverte 160 ans plus tôt.

La technologie récente a permis la propulsion du vaisseau sous l'effet d'une force constante, qui va lui permettre d'obtenir une accélération constante de 10 m.s^{-2}, soit près de 1 g (9,80665 m·s^{-2}), valeur très confortable, puisque semblable à la gravité terrestre.

Le vaisseau, qui se déplace en ligne droite, va accélérer pendant la moitié du trajet puis décélérer durant l'autre moitié (toujours constamment : 10 m.s^{-2}) pour arriver avec une vitesse nulle sur Proxima B.

<u>Le but du problème est de déterminer la durée de ce voyage, à travers l'espace intersidéral (peuplé de vilains aliens).</u>

Voici des données :

La distance parcourue par le vaisseau va être de 4,23 années-lumière.
Une année-lumière : distance parcourue pendant 365,25 jours par la lumière.
Vitesse de la lumière : on va prendre pour les calculs $c = 3\times10^8$ m.s^{-1}

La théorie de la relativité restreinte formulée par Albert Einstein indique que les durées et les distances ne sont pas perçues de la même manière pour les astronautes à bord du vaisseau et pour un observateur du vaisseau resté sur Terre (il en est de même de la masse, voir document « Allez Chewie, passe en vitesse lumière »).

Il va en être de même pour l'accélération.

Plus précisément, si du point de vue des astronautes, l'accélération du vaisseau est constante égale à 10 m.s^{-2}, l'accélération du vaisseau pour un observateur terrestre n'est pas constante, sous peine de voir l'engin atteindre puis dépasser la vitesse de la lumière…

La formule que donne la relativité est la suivante : $\boxed{a(t) = \dfrac{1}{\gamma^3(t)}A = \left(\sqrt{c^2 - v^2(t)}\right)^3 \times \dfrac{A}{c^3}}$

où $a(t)$ et $v(t)$ sont respectivement l'accélération et la vitesse du vaisseau à l'instant t dans le référentiel héliocentrique et A l'accélération constante du vaisseau dans son propre référentiel.

On remarque que lorsque la vitesse v du vaisseau augmente, l'accélération a diminue et tend vers 0 lorsque le vaisseau s'approche de la vitesse de la lumière… (voir le document « Allez Chewie, passe en vitesse lumière » pour l'étude du facteur de Lorentz $\gamma(t) = \boxed{\dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2(t)}}}$).

Soit $d(t)$ la distance parcourue, depuis la Terre par le vaisseau à l'instant t dans le référentiel héliocentrique.

On rappelle que $d'(t) = v(t)$ et $v'(t) = a(t)$ (relations de dérivation).

1. a. Montrer que $t \longmapsto \dfrac{v(t)}{\sqrt{c^2 - v^2(t)}}$ est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{c^2\ v'(t)}{\left(\sqrt{c^2 - v^2(t)}\right)^3}$ sur $[0\ ;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;+\infty[$, $\dfrac{v(t)}{\sqrt{c^2 - v^2(t)}} = \dfrac{A}{c}t$.

c. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;+\infty[$, $v(t) = \dfrac{c.\,A.\,t}{\sqrt{c^2 + A^2t^2}}$.

Remarque : on constate que v tend vers c lorsque t tend vers l'infini.
Par ailleurs, pour t proche de 0, on retrouve l'expression $v = At$ de la mécanique galiléenne.

2. En déduire $d(t)$ en fonction de t.

Le résultat précédent permet d'exprimer t en fonction de $d(t)$ et A et on admet que $t = \sqrt{\dfrac{d(t)^2}{c^2} + 2\dfrac{d(t)}{A}}$.

3. Applications numériques

a. Calculer la durée du voyage pour un observateur terrestre (attention, on rappelle que le voyage est composé de deux parties de même durée, la fusée décélérant à mi-parcours)..

b. Calculer la vitesse maximale que le vaisseau va atteindre pour l'observateur terrestre.

Remarques : - la durée est « raisonnable » à l'échelle d'une vie humaine. Les astronautes pourront même revenir sur Terre et retrouver leurs proches.
- la vitesse atteinte est gigantesque à notre échelle. Actuellement, la plus grande vitesse jamais atteinte par un être humain l'a été par l'équipage d'Apollo 10 en 1969 : 39 896 km/h (11,1 km/s).

Un autre élément intéressant de cette étude est de connaitre la durée du voyage pour les astronautes, à bord de leur vaisseau spatial tout équipé et spécialement affrété par Maths-au-quotidien Spaceways.

D'après la relativité restreinte, à accélération constante, si $T(t)$ est le temps propre des astronautes (dans le référentiel du vaisseau), en fonction du temps t de l'observateur terrestre, on a $T'(t) = \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{c}\sqrt{c^2 - v^2(t)}$.

4. Montrer que $T'(t) = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + A^2t^2}}$.

On admet qu'alors $T(t) = \dfrac{c}{A}\ \ln\left(\dfrac{At}{c} + \sqrt{1 + \dfrac{A^2t^2}{c^2}}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

(vous pourriez montrer que $t \longmapsto \dfrac{c}{A}\ln\left(\dfrac{At}{c} + \sqrt{1 + \dfrac{A^2t^2}{c^2}}\right)$ est la primitive de $t \longmapsto \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + A^2t^2}}$ qui s'annule en 0…).

5. Calculer alors la durée du voyage pour les astronautes (attention, on rappelle que le voyage est composé de deux parties de même durée, la fusée décélérant à mi-parcours).

Compléments : Voyages spatiaux (aller simple) avec A = 10 m/s^{-2}

Destination	Distance	Durée terrestre	Durée à bord	Vitesse max atteinte
Lune	384 000 km	3,44 h	3,44 h	62 km/s
Soleil	150×10^6 km	68 h	68 h	1 224 km/s
Pluton	$5{,}8\times10^9$ km	17,6 jours	17,6 jours	7 614 km/s
Proxima Centauri	4,23 a.l.			
Nébuleuse du Crabe	6 300 a.l.	6 302 ans	16,7 ans	0,99999995 c
Centre galactique	26 000 a.l.	26 002 ans	19,4 ans	0,999999997 c
Galaxie d'Andromède	$2{,}5\times10^6$ a.l.	$2{,}5\times10^6$ ans	28,1 ans	$\approx c$
Limite de l'univers observable	$13{,}8\times10^9$ a.l.	$13{,}8\times10^9$ ans	44,5 ans	$\approx c$

Remarquer les différences de durées (terrestres et à bord) !